1. *Использование геометрического подхода при решении уравнений и неравенств с параметром*

Суть геометрического подхода к решению уравнений, систем уравнений, а также неравенств и систем неравенств, зависящих от параметра (параметров), заключается

а) в построении в декартовой прямоугольной системе координат «геометрического образа» уравнения или системы уравнений (неравенств);

б) последующем анализе изменений этого геометрического образа в зависимости от изменений параметра (параметров).

Геометрический образ уравнения или системы уравнений может зависеть от того, как это уравнение или система уравнений преобразуются перед построением его образа. Поясним это примером.

Пусть требуется выяснить сколько решений имеет уравнение $2-|x-a|=x^2$ в зависимости от значений параметра a.

Введем в рассмотрение функции $y_1(x)=2-|x-a|$ и $y_2(x)=x^2$. Их графики изображены на рис. 1.1. При этом график первой функции изображен для трех различных значений параметра a.

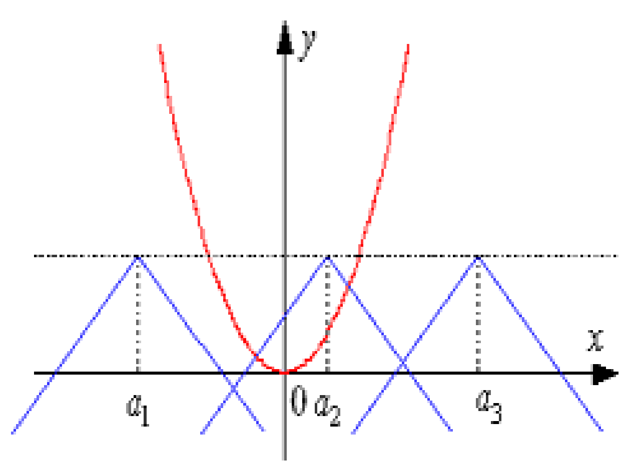

рис. 1.1

Перепишем уравнение в равносильной форме $2-x^2=|x-a|$ и введем в рассмотрение функции $y_1(x)=2-x^2, y_2(x)=|x-a|$. Геометрический образ данного уравнения, равносильного исходному, будет уже иным (рис. 1.2).

Решение приведенного примера для обоих способов записи уравнения и соответственно двух различных геометрических образов не будет отличаться в принципиальных моментах. Однако, в некоторых случаях удачное преобразование уравнения перед построением его геометрического образа может существенно упростить решение задачи.

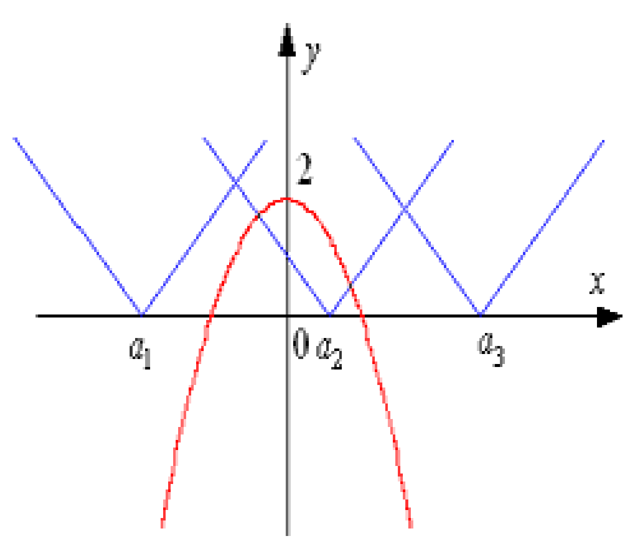

рис. 1.2

Например, в аналогичной задаче на исследование числа решений уравнения $|x^2-4x|=a+2x$ в зависимости от значений параметра a предпочтительнее запись этого уравнения в равносильной форме $a=|x^2-4x|-2x$ с последующей реализацией геометрического подхода для этой формы записи уравнения.

Пример 1. Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$|x-a|=\frac{1}{x-3} \qquad (1)$$

имеет единственное решение и найти это решение.

__Решение__. Построим в декартовой прямоугольной системе координат Oxy график функции $y_1(x)=\frac{1}{x-3}, x\neq 3$ (рис. 1.3). И здесь же – график функции $y_2(x)=|x-a|, x\in R$ при некотором значении параметра a (на рис. 1.3– при $a=2$). Графики обеих функций пересекаются в единственной точке M_1 с координатами $(x_1; x_1-2)$.

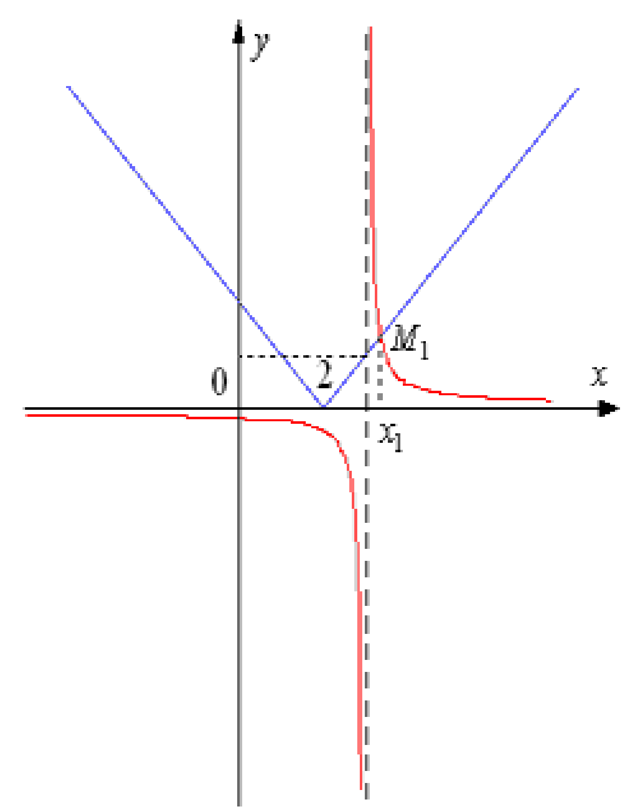

рис. 1.3

Соответственно уравнение (1) при $a=2$ имеет единственное решение $x=x_1$. Искомое значение x_1 можно найти в результате решения уравнения $x_1-2=\frac{1}{x_1-3}$ при дополнительном условии $x_1>3$. Решая это уравнение, получаем, что $x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. При изменении параметра a график функции $y_2(x)=|x-a|$ - уголок с вершиной в точке $(a;0)$ – перемещается вдоль оси Ox. Нетрудно видеть, что для всех $a<a^\bullet$, где $a^\bullet$ - значение параметра a, при котором график функции $y_2(x)$ занимает положение, изображенное на рис. 1.4, уравнение (1) будет иметь единственное решение. Оно находится в результате решения уравнения $x-a=\frac{1}{x-3}$ при дополнительном условии $x>3$ и равно:

$$x=\frac{a+3+\sqrt{a^2-6a+13}}{2}.$$

Значение $a^\bullet$ параметра a находим из условия касания левой ветви $(y=a^\bullet-x)$ графика функции $y_2(x)=|x-a^\bullet|$ и ветви гиперболы $y_1(x)=\frac{1}{x-3}$

$$\begin{cases} a^\bullet-x=\dfrac{1}{x-3} \\ -1=\dfrac{1}{(x-3)^2} \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4, \\ a^\bullet=5. \end{cases}$$

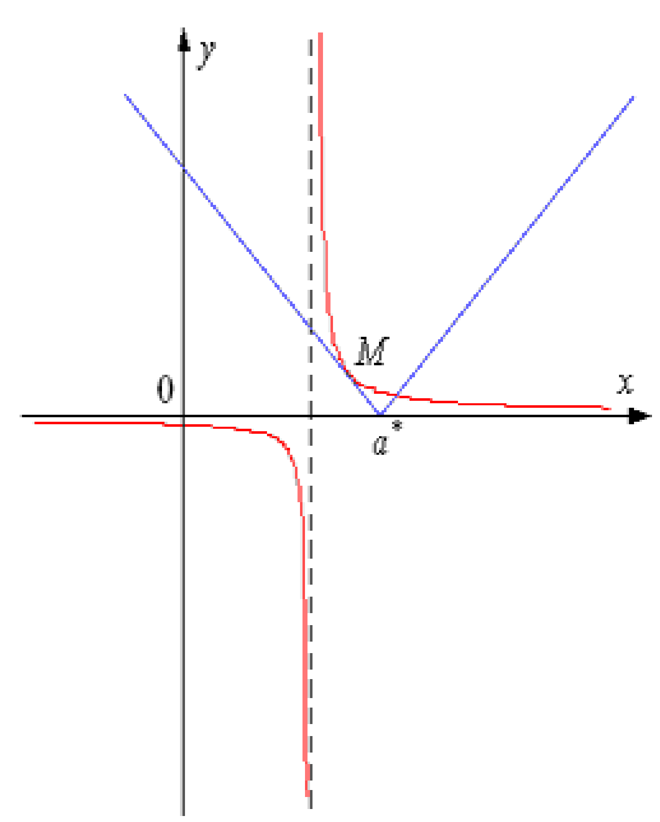

рис. 1.4

__Ответ:__ $x=\frac{a+3+\sqrt{a^2-6a+13}}{2}$ при $a<5$.

Пример 2. Найти все значения параметра а, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = ax - 4 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет более одного решения

__Решение__. __Способ 1.__ Первое уравнение системы является уравнением окружности с центром в начале координат и радиусом 2. Второе уравнение – уравнение пучка прямых, проходящих через точку А (0;-4) (рис. 1.5).

Единственное решение система уравнений (2) будет иметь при $a = \pm a^{\bullet}$, когда прямая $y = ax - 4$ касается окружности $x^2 + y^2 = 4$. Поскольку $a = tg\alpha$, то из прямоугольного треугольника ОВА находим: $tg\alpha = \frac{AB}{0B}$; но $OB = 2$, $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2}$; $AB = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$, и потому $tg\alpha = \sqrt{3}$.

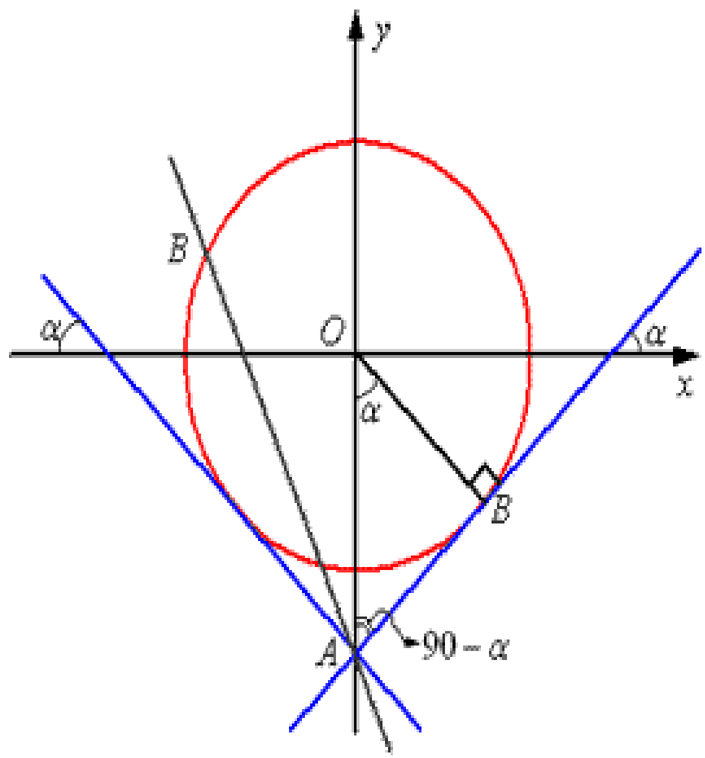

рис. 1.5

Очевидно, что при $a < -\sqrt{3}$ и $a > \sqrt{3}$ система (2) будет иметь два решения (прямая АВ будет пересекать окружность в двух точках).

__Ответ:__ $a \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.

__Способ 2.__ Значения параметра $\left(\pm a^{\bullet}\right)$, при которых прямая $y = ax - 4$ является касательной к окружности, находим из условия касания графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_2(x), \\ y_1'(x) = y_2'(x), \end{cases}$$

где $y_1(x) = -\sqrt{4 - x^2}$; $y_2(x) = ax - 4$.

Имеем

$$\begin{cases} -\sqrt{4 - x^2} = ax - 4, \\ \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = a. \end{cases} \qquad (3)$$

Заменяя в первом уравнении а на $\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, получаем $-\sqrt{4 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} - 4$. Решая это уравнение, находим $x = \pm\sqrt{3}$ и из второго уравнения системы (3) - $a^{\bullet} = \pm\sqrt{3}$. Значения параметра а, при которых система уравнений (2) имеет более одного решения (два решения – см. рис. 1.5), лежат на лучах $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

__Способ 3.__ Значения параметра a, при которых система уравнений (2) имеет единственное решение, могут быть найдены из условия единственности решения уравнения $x^2 + (ax - 4)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2\left(1 + a^2\right) - 8ax + 12 = 0$.

Поскольку это квадратное уравнение относительно переменной x с коэффициентом $1 + a^2 \neq 0$ при x^2, то единственное решение это уравнение будет иметь тогда и только тогда, когда $D_x = 0 \Leftrightarrow 64a^2 - 48\left(1 + a^2\right) = 0 \Rightarrow a^* = \pm\sqrt{3}$.

2. Задачи для самостоятельной работы

Используя геометрический подход, решите следующие задачи

1. Найти все значения параметра а, при которых корни уравнения

$$ax^2 + (a-2)x - 2a = 0$$

a) а) оба меньше 1;

b) б) $x_1 < 0$, а $x_2 > 3$.

2. Найти все значения параметра а, при которых корни уравнения $(a-1)x^2 - (a+1)x + a = 0$

a) а) $0 < x_1$, $x_2 < 3$;

b) б) $x_1 < -1$, $x_2 > 0$;

c) в) $x_1 < 0_1$, $x_2 > 1$.

3. Найти все значения параметра а, при каждом из которых существует решение неравенства

$$\left|x - \frac{25}{4}a^2\right| < 3 - |5a - 4 - x|.$$

4. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$a|x+1| - x - a^2|x| = 0$ имеет три различных решения.

5. Найти все значения параметра а, при каждом из которых неравенство

$\cos^2 x + 2b\sin x - b^2 < b - 2$ выполняется для любого числа х.

6. Найти все значения параметра а, при каждом из которых неравенство

$3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

7. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$ имеет ровно два различных решения и найти эти решения.

8. При каких значениях параметра а уравнение $x - a = 2\left|2|x| - a^2\right|$ имеет три различных корня. Найти эти корни.

9. Найдите наибольшее значение выражения $(x + y)$, если допустимые значения х и у удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 4$.